

APLICACIÓN DEL MOMENTO RESISTENTE AL CÁLCULO DE ENERGÍA CINÉTICA EN LAS ESTIMACIONES DE VELOCIDAD.

Ing. Anibal O. GARCIA
agarcia@perarg.com.ar

(Este artículo es una actualización del que, sobre el mismo tema, circuló desde agosto de 2002 por diversos medios electrónicos. Se amplía el modelo desarrollado, generalizando aplicaciones a los casos de derrape, y contrastando resultados con el estudio de cuatro casos particulares, dos provenientes de la bibliografía clásica, y otros dos resultante de ensayos de derrape. AOG, Enero 2006)

1.- INTRODUCCIÓN

Para la determinación de las condiciones iniciales bajo las que se produjo el choque, y calcular los parámetros cinemáticos y dinámicos de la colisión, uno de los recursos más habituales trata de estimar la energía cinética involucrada.

Para ello se estudia del movimiento posterior al impacto de uno o más protagonistas. Tanto las huellas de neumáticos dejadas en la calzada como la posición de reposo de los móviles respecto del punto de impacto, son datos fáciles de obtener en un relevamiento posterior al evento; y en última instancia -y en ausencia de datos más precisos-, un reconocimiento topográfico del lugar, permite establecer hipótesis de mínimos y máximos, que correctamente procesadas, determinan el límite de la probabilidad de ocurrencia del suceso.

En un movimiento combinado de traslación y rotación de los automóviles en un plano X-Y paralelo al piso, los desplazamientos son complejos, y las funciones que representan a los parámetros cinemáticos, no son sencillas. Las estimaciones de velocidades en esas condiciones, no resultan fáciles.

El presente trabajo presenta un método simplificado para estimar la energía cinética de un vehículo que realiza *trompos*, con un mínimo error. El modelo resulta de la aplicación de los principios de la física a un automóvil que **rota y se desplaza con las cuatro ruedas bloqueadas y apoyadas en el piso**. La hipótesis central es que todo el trabajo de fricción es debido al deslizamiento de los neumáticos contra el piso, el análisis resulta de la combinación de dos movimientos simples:

- i) La traslación del centro de masa del vehículo (S);
- ii) La rotación de los ejes del rodado respecto de un sistema de referencia externo (θ).

Debe prestarse especial atención al hecho de que, si durante el movimiento rototraslatorio **las ruedas no están bloqueadas** (como sucede en un amplio número de casos de post-colisión, y en algunas situaciones de derrape descontrolado) deberá tenerse en cuenta solamente la fracción de energía que se disipa por fricción lateral, y la porción -pequeña y hasta despreciable-, que corresponde a la disipación por rodadura. Este es otro caso, que ya ha sido analizado^(*) anteriormente, y sobre el que se realizan algunas aproximaciones en el final del presente artículo

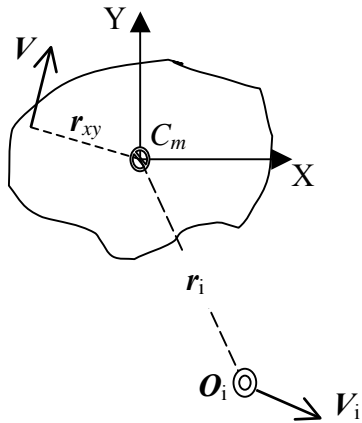
Cuando el ángulo de rotación (θ) descripto por el automóvil es grande comparado con el desplazamiento del centro de masa (S), los resultados derivados de ambos modelos convergen. Ello se explica porque en esos casos, las ruedas tienden a comportarse como si estuvieran bloqueadas; ruedan muy poco o directamente no ruedan.

A este último caso se aplica el modelo desarrollado en el presente artículo.

(*) La estimación del coeficiente *aparente* de fricción en derrape puede verse en **Luis M Ance – Cálculo de Velocidad en Base a Huellas de Derrape** (Primer Congreso de Accidentología Vial, Avellaneda, Octubre 2003).

2.- LA ENERGIA CINÉTICA EN EL MOVIMIENTO ROTOTRASLATORIO

El movimiento entre el punto de impacto y el de reposo de un móvil sigue las leyes del movimiento uniformemente (des)acelerado. La causa principal por la cual la velocidad inicial v_i de un punto cualquiera del móvil disminuye en forma lineal se debe al impulso que ejercen las fuerzas de rozamiento contra el piso.



Sea m la masa del rodado, C_m el centro de masa en el plano x-y, g la aceleración de la gravedad, μ el coeficiente de rozamiento de los neumáticos respecto del piso, V_i la velocidad inicial del centro de rotación instantáneo O_i , ω_i la velocidad de rotación inicial respecto de O_i distanciado del C_m un valor r_i , ω_o la velocidad de rotación inicial respecto del centro de C_m , e I_{zz} el momento de inercia de la masa del rodado respecto de O_i , I_o el momento de inercia de la masa del rodado respecto de C_m , y obviando un desarrollo analítico, puede plantearse que la velocidad instantánea de un punto cualquiera del rodado, ubicado a una distancia del r_{xy} del C_m , estará dada por:

$$v_i = V_i + \omega_i r_i + \omega_o r_{xy},$$

y la energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v_i^2$$

de donde

$$E_c = \frac{1}{2} m V_i^2 + \frac{1}{2} m r_i^2 \omega_i^2 + \frac{1}{2} m r_{xy}^2 \omega_o^2,$$

$$E_c = \frac{1}{2} m V_i^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_i^2 + \frac{1}{2} I_o \omega_o^2,$$

En la mayoría de los casos se considera que el desplazamiento del centro de masa es rectilíneo, simplificación que con ciertos recaudos puede ser adoptada como una muy buena aproximación, resultando entonces

$$v_i = V_s + \omega_o r_{xy};$$

$$E_c = \frac{1}{2} m V_s^2 + \frac{1}{2} I_o \omega_o^2, \quad (1)$$

La ecuación (1) tiene cuatro incógnitas (E_c , V_s , I_o y ω_o), con lo cual resulta indeterminada de tercer orden. Algunos autores han propuesto la solución del problema a partir de estimar el valor de I_o , y asociar a ω_o con V_s . Este procedimiento es de alto grado de incertidumbre.

El investigador puede adoptar recaudos para procesar los datos y estimaciones del momento de inercia y verificar el rango de incertidumbre (y su sensibilidad) en que se encuentran los resultados. Esto forma parte de la responsabilidad profesional con que se aborda la investigación. Puede también, disponiendo del registro de huellas en el pavimento, considerar si se encuentra frente a un caso que se aproxima a la *rototraslación pura*, y aplicar el modelo desarrollado en este ensayo. Y en última instancia –que como se verá más adelante resulta lo más recomendable–, se debe siempre analizar la naturaleza del fenómeno, y aplicar el o los modelos más adecuados, y comparar los resultados con los registros relevados en el lugar de los hechos.

El razonamiento desarrollado a continuación es **sólo uno** de los modelos aplicables.

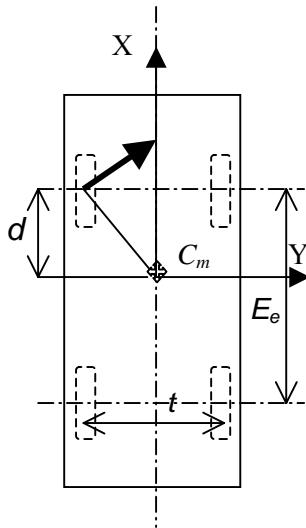
3.- DETERMINACIÓN DEL MOMENTO RESISTENTE

Es un criterio aceptado en la investigación de accidentes de tránsito, despreciar o no considerar formas de disipación de energía asociadas al calor, al sonido, e incluso al trabajo mecánico de las suspensiones.

De tal manera se considera que, por aplicación del principio de conservación, la diferencia entre energía cinética contenida en el móvil al momento de iniciar el movimiento de rotación y traslación, y la remanente al finalizar el mismo, se transforma en trabajo de rozamiento. Llamando F_r a la fuerza lineal de rozamiento -suponiendo una partícula con la masa concentrada en el centro de masa C_m -, S a la trayectoria del centro de masa, M_r el momento de las fuerzas de fricción respecto del centro de masa al girar el ángulo θ , la expresión del trabajo total de rozamiento es:

$$L = F_r S + M_r \theta = m g u S + M_r \theta = E_c \quad (2)$$

La ecuación (2) posee dos incógnitas; sin embargo, como demostraremos a continuación, el valor del momento resistente al giro puede ser determinado con suficiente precisión, conociendo la distancia entre ejes y la trocha del automóvil en cuestión, y su masa.



Todo automóvil trasmite su carga al piso en cuatro puntos por medio de los neumáticos. Cualquier desplazamiento que quiera imprimirse al rodado, encontrará la oposición de las fuerzas de rozamiento en cada uno de las ruedas, de dirección contraria al desplazamiento, y proporcionales a la fuerza transmitida (descargada) al piso en cada punto.

Asumiendo una razonable simetría longitudinal en la distribución de masas de un automóvil -lo que implica admitir que el C_m se encuentra en el eje longitudinal y éste coincide con el eje X-, el momento resistente *al giro con respecto al eje normal que pasa por el centro de masa (Z)*, resulta la sumatoria de los momentos de cada una de las fuerzas de rozamiento respecto del C_m .

Siendo D y T la carga transmitida al piso en los ejes delantero y trasero respectivamente, d la distancia del eje delantero al C_m , E_e la distancia entre ejes, y t la trocha, puede plantearse entonces

$$M_r = 2 (uD/2) [d^2 + (t/2)^2]^{1/2} + 2 (uT/2) [(E_e - d)^2 + (t/2)^2]^{1/2} \quad (3)$$

El valor de la trocha delantera difiere de la trasera en unos pocos centímetros; para los cálculos se puede considerar -y así se ha tomado en este trabajo-, la trocha promedio, sin que ello afecte el error de las determinaciones. Haciendo $k = (d/E_e)$, resultará entonces

$$d = k E_e \quad \text{y} \quad E_e - d = (1 - k) E_e$$

Tomando ahora momentos estáticos respecto del eje Y, puede plantearse

$$D d = T (E_e - d) = T (1 - k) E_e.$$

Por último resulta obvio que $D + T = m g$. Introduciendo estas relaciones en la ecuación (3) y operando resulta

$$M_r = uD [k^2 E_e^2 + (t/2)^2]^{1/2} + uT [(1-k)^2 E_e^2 + (t/2)^2]^{1/2}$$

$$M_r = (uT/k) \{[(1-k)^2 k^2 E_e^2 + (1-k)^2 (t/2)^2]^{1/2} + [(1-k)^2 k^2 E_e^2 + k^2 (t/2)^2]^{1/2}\}$$

que haciendo $Z = \{[(1-k)^2 k^2 E_e^2 + (1-k)^2 (t/2)^2]^{1/2} + [(1-k)^2 k^2 E_e^2 + k^2 (t/2)^2]^{1/2}\}$

resultará
$$M_r = (u m g) Z \quad (4)$$

El término Z expresado como función de k , depende de la distribución de la carga. El valor de k es alcanza un valor mínimo de 0,4 con el auto vacío y 0,5 con todos sus ocupantes; en el extremo opuesto puede alcanzar un valor extremo de 0,6 en el caso de las pick-ups a plena carga. La tabla de la página siguiente presenta la desviación del valor de la llave, respecto de un valor medio $k = 0,5$, para los valores extremos de k de 0,4 y 0,6, en el espectro de variación de E_e y t para automóviles pequeños, medianos y grandes y camionetas del tipo “4 x 4”.

MARCA	MODELO	ENTRE EJES	TROCHA DELANTERA	TROCHA TRASERA	Desviaciones a $k = 0,5$		
					$k = 0,4$		$k = 0,6$
FIAT	UNO S 1.3	2,362	1,321	1,34	2,65%	0	2,65%
TOYOTA	Corolla	2,6	1,48	1,46	2,64%	0	2,64%
DAEWOO	TACUMA	2,6	1,475	1,48	2,64%	0	2,64%
CHRYSLER	CARAVAN	2,88	1,6	1,625	2,66%	0	2,66%
BMW	740i	2,93	1,552	1,568	2,75%	0	2,75%
BMW	745i A	2,99	1,586	1,59	2,76%	0	2,76%
CHEROKEE	JEEP 4x4	2,65	1,524	1,526	2,61%	0	2,61%

Que la dispersión sea de un orden inferior al 2,76 % en todos los casos, resulta de suma importancia; implica que adoptar un valor de $k = 0,5$ en forma indiferenciada no introduce error sensible en la resolución de la ecuación (4). Y dado que para ese valor resulta $k = 1-k$, la ecuación (4) puede describirse:

$$M_r = u m g \frac{1}{2} [E_e^2 + t^2]^{1/2} \quad (5)$$

La ecuación (5), introducida en la ecuación (2), permite calcular la energía cinética con que se inicia un movimiento rototraslatorio, incorporando los datos de la distancia entre ejes y la trocha del automóvil en cuestión, valores muy fáciles de conocer o medir, o incluso estimar sin introducir mayores errores. La expresión queda:

$$E_c = u m g \{S + \frac{1}{2} \theta [E_e^2 + t^2]^{1/2}\} \quad (6)$$

En donde la variable de la masa m , afectada por el estado de carga y alistamiento (carga de combustible, carga transportada, peso real de los ocupantes), resulta la más difícil de determinar. Si lo que se tratara de determinar es la velocidad lineal inicial en un proceso de frenado desequilibrado, que originara rotación, la ecuación (6) queda expresada en forma independiente de la masa:

$$V_o^2 = 2 u g \{S + \frac{1}{2} \theta [E_e^2 + t^2]^{1/2}\} \quad (7)$$

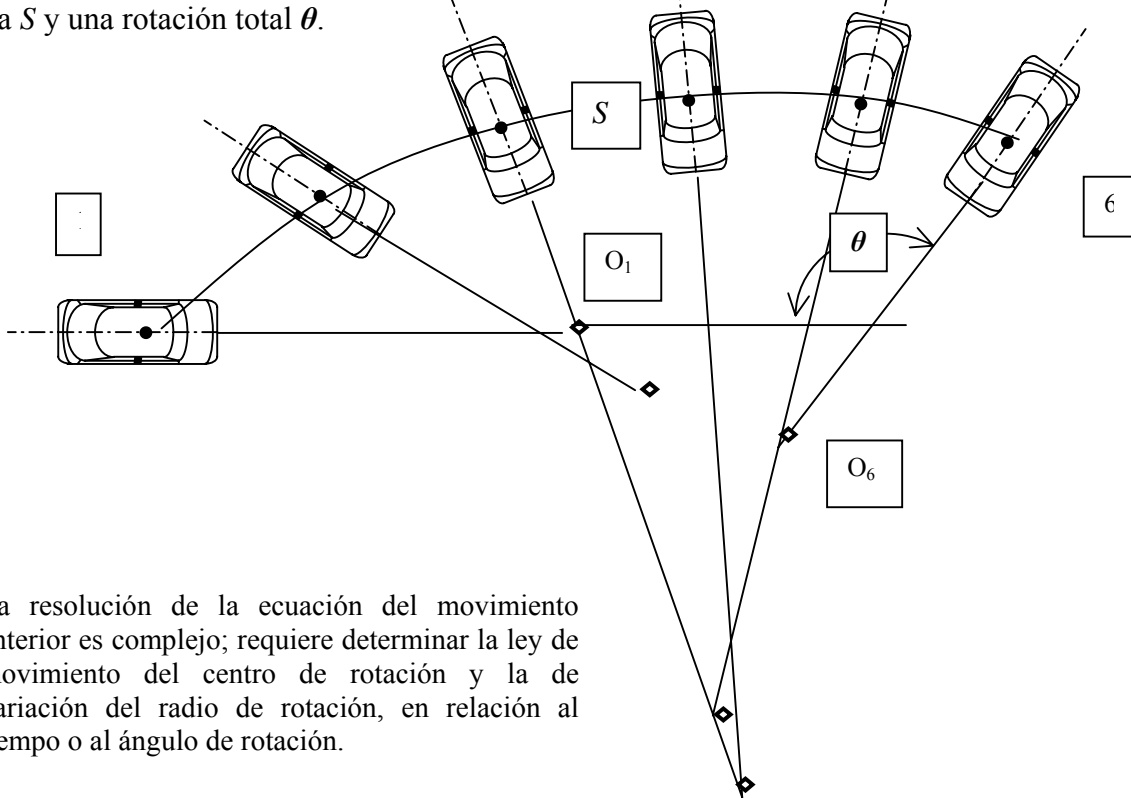
Analizando la relación entre distancia entre ejes y la trocha para 55 modelos de automóviles modernos y 12 camionetas 4x4 y pick-ups doble cabina, la relación $f = [E_e^2 + t^2]^{1/2} / E_e$ tiene un valor medio de 1,151 para todos los autos (con variación entre extremos de 1,127 y 1,194) y 1,138 (variación 1,000 – 1,173) para las camionetas. De manera que para aproximaciones de $\pm 10\%$ en el valor final, puede adoptarse la expresión

$$E_c = u m g \{S + 0,575 \theta E_e\} \quad (8)$$

4.- SIMPLIFICACIONES ADICIONALES. PRECAUCIONES.

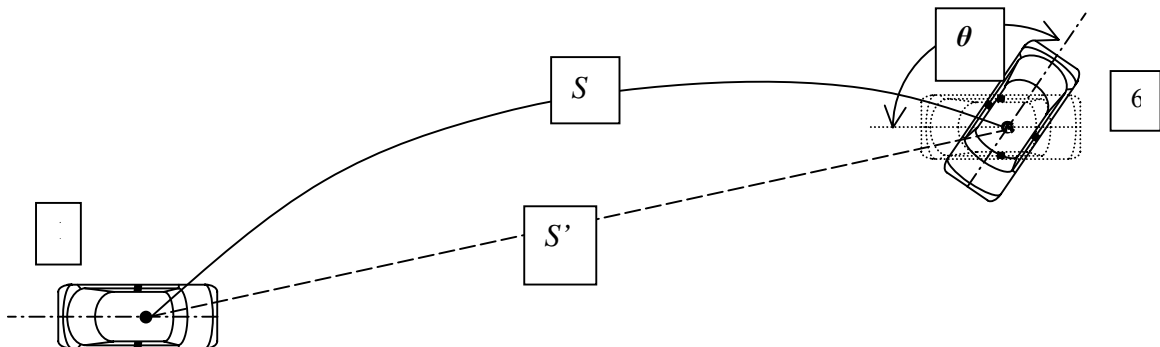
En las ecuaciones anteriores, el valor de S es la trayectoria del centro de masa del automóvil, la que no siempre es la distancia en línea recta entre el punto de impacto y el punto de reposo. En el caso más general corresponde considerar el caso de un desplazamiento complejo, donde el centro de rotación instantáneo tiene un movimiento desconocido.

El diagrama siguiente representa un hipotético caso de movimiento rototraslatorio desde una posición 1 pasando por 2, 3, ..hasta la posición de reposo 6, con un desplazamiento del centro de masa S y una rotación total θ .



La resolución de la ecuación del movimiento anterior es complejo; requiere determinar la ley de movimiento del centro de rotación y la de variación del radio de rotación, en relación al tiempo o al ángulo de rotación.

Las ecuaciones (6), (7) y (8) remiten a esta configuración específica, y la simplificación formal supone descomponer el movimiento en un desplazamiento S seguido de un giro θ . Reemplazar la distancia S por S' , en la mayoría de los casos reales, puede introducir serios errores en los resultados. Cuando se conoce la posición final de los rodados y hay evidencias de las huellas de rozamiento de los neumáticos contra el piso, la determinación de la trayectoria S puede hacerse con medios gráficos con suficiente precisión.



5.- ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE LIMPURT ⁽¹⁾

Un vehículo fuera de control desliza lateralmente a través de una zona de césped hasta impactar con un árbol. El daño se encuentra concentrado próximo a la rueda trasera izquierda, aproximadamente 7 pies (2,143 m) detrás del centro de gravedad (centro de masa) del vehículo, como se ilustra e la figura 21-5. El impacto con el árbol causa un giro del auto en el sentido contrario a las agujas del reloj de 270° hasta detenerse. El peso del auto es de 3.600 lb (16.033 N – masa de 1.634,4 kg), la distancia entre ejes es de 9 pies (2,743 m), y el momento de inercia de 2.900 lb-pie-s² (3.937 kg m²). El coeficiente de fricción rotacional es 0,3. El auto se desplaza aproximadamente 46 pies (14,02 m) en forma lineal después del impacto. Determine la velocidad angular w del auto inmediatamente después del impacto, y estime la velocidad de salida desde el árbol

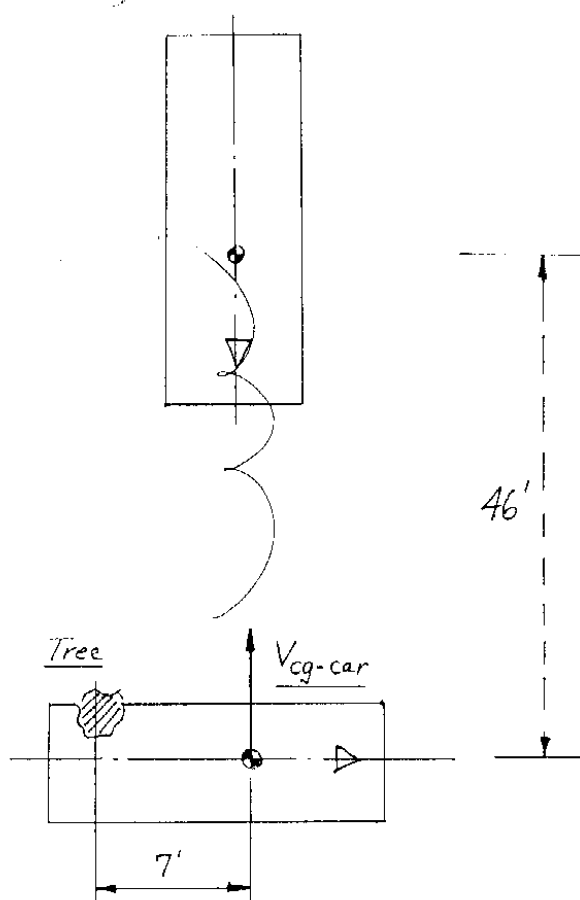


Figure 21-5. Example 21-3

Usamos balance de energía. La rotación es causada por la velocidad angular existente inmediatamente después del impacto. El balance de energía aplicado solo a la rotación es:

$$0 = \frac{1}{2} I w^2 - E_{rf}$$

que despejando resulta:

$$w = (2 * E_{rf} / I)^{1/2}$$

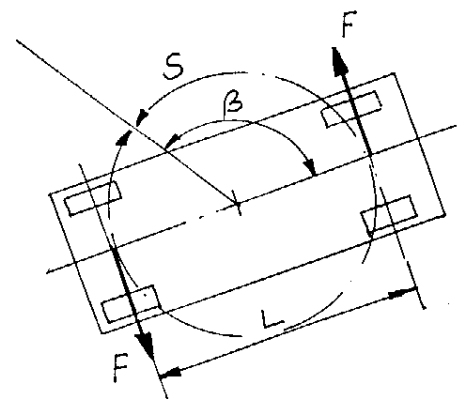


Figure 21-6. Rotational Friction

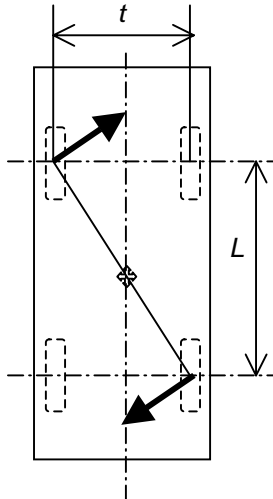
La energía de fricción rotacional entre los neumáticos y el suelo, resulta.... modificada para el desplazamiento circular (figura 21-6)

$$S = B * L/2$$

y la fuerza de fricción es

$$F_f = W * f_r$$

(el significado de los términos: w velocidad de rotación en s⁻¹, I momento de inercia, B ángulo de rotación en radianes, $1,5 \text{ Pi} = 4,7$ radianes en el caso indicado, L distancia entre ejes, W peso del vehículo)



1ª Observación: Combinando las expresiones anteriores, se deduce que el Momento que se opone a la rotación, según Limpert, estará representado por

$$M = W * f_r * L/2$$

En tanto que considerando una trocha t , ese momento resultará en realidad

$$M = 1/2 W * f_r * (L^2 + t^2)^{1/2}$$

Asumiendo un rango de valores $[1,35 < t < 1,45]$, la expresión $1/2 (L^2 + t^2)^{1/2}$ resulta de 1,53 a 1,55, entre un 11 a un 13 % superior al valor de $L/2$ que es 1,372 m. Esta discrepancia es una primera fuente de error sensible. Continuamos el desarrollo del texto de Limpert, agregando entre paréntesis los valores derivados de la corrección del momento resistente.

$$E_{rf} = 1/2 W * f_r * L * B = 1/2 x 16.033 x 0,3 x 2,743 x 4,7 = 31,02 \text{ kJ}$$

$$(\dots = 1/2 W * f_r * (L^2 + t^2)^{1/2} * B = \dots = 34,8 \text{ kJ})$$

Y la velocidad de rotación post impacto resulta

$$w = (2 * E_{rf} / I)^{1/2} = (2 x 31,02 / 3,937)^{1/2} = 3,97 \text{ s}^{-1} \quad (\dots = 4,2 \text{ s}^{-1})$$

El tiempo insumido en la rotación hasta detenerse es

$$T = 2 B/w = 2 x 4,7 / 3,97 = 2,37 \text{ s} \quad (\dots = 2,24 \text{ s}).$$

Asumiendo que tanto el movimiento lineal como el de rotación cesan al mismo tiempo, la velocidad (lineal) de salida del auto desde el árbol resulta determinado por

$$V_o = 2 S/T = 2 x 14,02 / 2,37 = 11,83 \text{ m/s} \quad (\dots = 12,51 \text{ m/s})$$

Finalmente podemos chequear la desaceleración media del auto durante el movimiento lineal

$$a = V_o^2 / 2S = (11,83)^2 / (2 x 14,02) = 5 \text{ m/s}^2,$$

lo que equivale a un factor de desaceleración de 0,51 g, valor aceptable para un vehículo deslizando sobre césped. ($a = 5,6 \text{ m/s}^2$, lo que equivale a un factor de desaceleración de 0,57 g)

2ª Observación. No parece razonable un coeficiente de fricción μ de 0,57 (ni siquiera 0,51) que se opone al deslizamiento del cuerpo, en un piso donde el coeficiente ante la rotación es de 0,3. Ningún autor ha indicado ni por aproximación una relación de 1,9 entre ambos.

Revisión del Problema

Con una velocidad inicial de desplazamiento lineal del centro de masa de 11,83 m/s, y una velocidad angular de rotación de $3,97 \text{ s}^{-1}$, la energía cinética inicial del vehículo es de 145,4 kJ. (Con valores corregidos a 12,51 m/s y $4,2 \text{ s}^{-1}$, la energía cinética inicial es de 162,6 kJ). Calculando la equivalencia en términos de trabajo mecánico de fricción con la ecuación aproximada (8), esa energía cinética debería ser de 103,2 kJ.

Existen varios indicadores para poner en duda los resultados originales de Limpert. Se verifica que la relación 1,9 entre el coeficiente de fricción lineal que resulta del cálculo, y el coeficiente de fricción que se opone al movimiento de rotación supuesto a priori, se mantiene cualquiera sea el coeficiente supuesto. Es decir que suponer otro valor del coeficiente de fricción no explica la discrepancia.

Cuando se arriba a resultados contradictorios, sólo cabe replantear los puntos de partida. Una posible fuente de error podría deberse a asumir un giro de $1,5 \pi$ (3/4 de vuelta), cuando es probable que se tratara de un ángulo de $3,5 \pi$ (1¾ de vuelta). Reemplazando con este segundo valor, los parámetros resultan;

$$\begin{aligned} \omega &= 6,07 \text{ s}^{-1} ; \\ T &= 3,62 \text{ s}; \\ V_0 &= 7,74 \text{ m/s}; \end{aligned}$$

Con este conjunto de valores, la aceleración media resulta $a = 2,13 \text{ m/s}^2$, lo que equivale a un factor de desaceleración de 0,21; valor bastante más aproximado al coeficiente $\mu = 0,3$ g supuesto. Y el trabajo mecánico de fricción calculado con un giro total de 1 vuelta y $\frac{3}{4}$, es de 150,9 kJ, cercano al valor de energía cinética inicial.

Este problema sirve para mostrar la importancia de verificar los resultados derivados de la aplicación de un modelo (el cinemático en este caso), con otro derivado de la aplicación de otro principio físico, como el de conservación de la energía.

6.- APLICACION A CASOS DE DERRAPE

En la literatura norteamericana, se ha deslizado la idea de que el coeficiente de rozamiento μ es diferente según si las ruedas se encuentran deslizando en el sentido longitudinal (frenada con bloqueo) o transversal (derrape). Esta afirmación carece de sentido físico, y para nada se relaciona en el contacto neumático-pavimento.

Ni siquiera la posibilidad de expresar mediante un valor de μ_t diferente de μ_n , el efecto de las componentes de fuerza y el desplazamiento, variables durante el movimiento de rotación y traslación combinados, justifica esta afirmación. Una explicación razonable de esa variación fue aportada por el Dr. Ernesto Martínez ⁽²⁾:

*Dado que los neumáticos tienen un dibujo y una estructura marcadamente anisotrópica según se la contemple a lo largo de la banda de rodamiento o transversalmente a ella, parece natural distinguir dos coeficientes de rozamientos distintos ... (sin embargo) Los experimentos más cuidadosos no parecen detectar ninguna diferencia entre estos dos valores: por extraño que parezca, parece ser exactamente lo mismo arrastrar una rueda bloqueada en el sentido de su banda de rodamiento que atravesada según D. P. Wood en **Forensic Accident Investigation** ... a falta de argumentos a favor, en la reconstrucción estamos justificados en usar un único valor de μ para tratar frenadas y derrapes...*

*... si un auto se ha desplazado una distancia d girando al mismo tiempo alrededor de su eje vertical ¿cuál era la velocidad inicial de traslación?. La respuesta de **Limpert**, dada sin explicación, es que hay que usar la expresión 3.6, pero reduciendo el μ adecuado a la situación en un 20 %.*

*Si bien la reducción exacta depende de cada caso en especial, y el 20 % que recomienda **Limpert** es generoso, .. la razón física por la cual el auto gira sobre su eje vertical experimente un rozamiento menor que uno que no gira, es clara y comprensible ... cuando el auto se desplaza a una velocidad v_{cm} de su centro de masa, y a la vez rota con una velocidad angular ω , las velocidades de sus cuatro ruedas ya no son las mismas, ni en módulo ni en dirección. La velocidad de la i ésima rueda esta dada por*

$$v_i = v_{cm} + \omega \times r_i$$

donde r_i es el radio vector desde el centro de masa hasta la rueda i ésima.

Como los cuatro radio vectores son distintos, las velocidades de las cuatro ruedas también lo son. Esto implica que las cuatro fuerzas de roce, que siguen teniendo el mismo módulo que en el caso anterior, ya no sean paralelas; por ende, su suma vectorial es menor que antes. Y es la suma vectorial de las fuerzas individuales de roce lo que detiene el auto. Resultado: la fuerza neta de roce que se opone a la traslación se ve disminuida por el giro. Cuánto exactamente, depende del detalle de la relación entre la velocidad de traslación y la de rotación, y de las distancias del centro de masa a las ruedas. Un descuento del 20 % es seguro y aconsejable.

El análisis anterior sugiere que las expresiones [6] y [7] sólo son válidas a condición de reducir el valor de u en un valor de hasta un 20 %. El argumento es la consideración de las componentes (distintas) de las fuerzas de rozamiento, sostenidos como herramienta de análisis en los modelos desarrollados por autores norteamericanos. Analizaremos el modelo de **Limpert** al que alude Martínez, tal como lo desarrolla este autor en su Manual de reconstrucción de accidentes⁽³⁾.

El razonamiento de **Limpert** estima la fuerza resultante aplicada en una rueda en un instante i mediante la ecuación

$$F_i = [f_{tr} |\text{sen } \alpha_i| + f_{br} |\text{cos } \alpha_i|] W \quad (20-76)$$

Donde W es el peso del vehículo (m g) y f el coeficiente debido al derrape y al frenado (ruedas sin bloquear) respectivamente. El trabajo desarrollado por las fuerzas de fricción F_i , igualado a la energía cinética perdida, está dado por la expresión:

$$E_c = \Sigma \frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) (S_{i+1} - S_i) \quad (20-77)$$

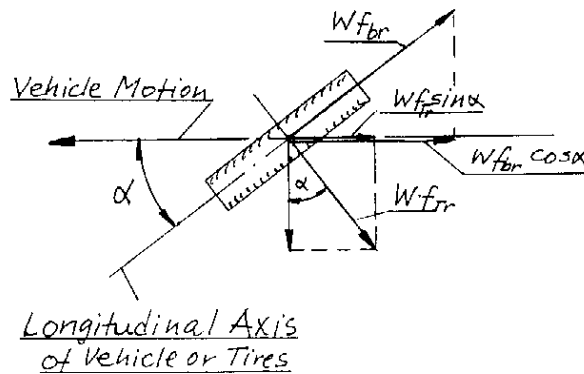


Figure 20-23. Tire Forces in Spin Motion

donde S_i es la distancia recorrida en el momento i . La sumatoria se extiende desde $i = 0$ hasta n , siendo n el número de sectores en que se divide la trayectoria. El ángulo α_i es el ángulo medio en el tramo considerado en cada caso. La figura 20-24 ilustra el método de cálculo

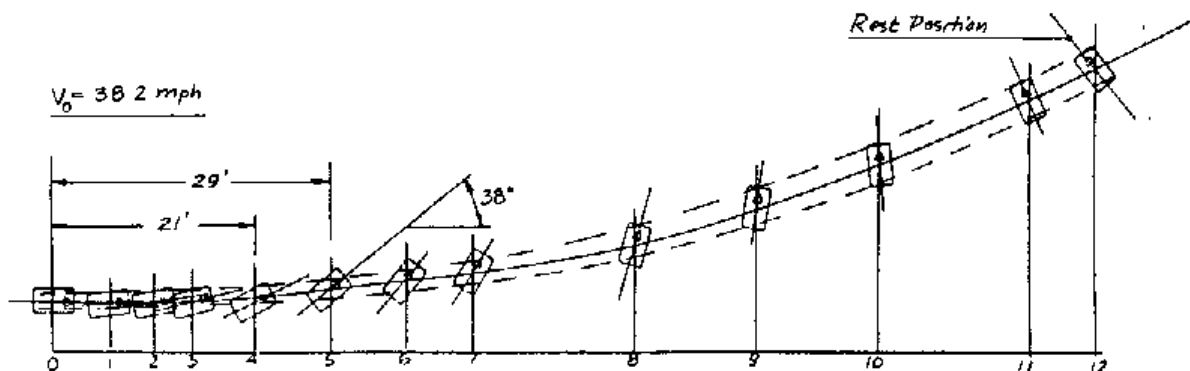


Figure 20-24- Speed from Spin Marks

Es conveniente señalar que el análisis de **Limpert** remite a un vehículo que en circulación pierde la trayectoria normal y entra en "trompo". En ese caso las ruedas no están bloqueadas, e incluso es probable

que durante el primer tramo de la trayectoria irregular continúen traccionando; al fin y al cabo ése y no otro es el significado de la fuerza $W f_{br}$.

Cabe recordar que la ecuación (6), en la forma simplificada, supone que en el movimiento las ruedas están deslizando, bloqueadas, sin rodar. La equiparación al modelo de Limpert sólo es válida a partir de un determinado ángulo de desplazamiento, en el cual el efecto de rodadura de los neumáticos dejara de tener incidencia en la variación del movimiento. Sólo en el tramo restante, hasta alcanzar el reposo, debería cumplirse la mencionada ecuación (6)

$$E_c = \mathbf{u m g} \{S + 1/2 \theta [E_e^2 + t^2]^{1/2} \} \quad (6)$$

En lo que sigue discutiremos esta equiparación. Lo haremos desde el cotejo de resultados comparados por aplicación de una y otra forma de estimación. Y con los resultados a la vista, reintentaremos una comprensión conceptual del criterio expuesto en el presente artículo.

Limpert desarrolla numéricamente el ejemplo de la figura 20-24 (ejemplo 20-8). Para una trayectoria de 110 pies con un ángulo de giro total de 130°, con un coeficiente de fricción transversal \mathbf{u} de 0,6 (el valor implícito del coeficiente longitudinal de rodadura es cero), la velocidad inicial será de 17 m/s (61,1 km/h - 38,2 m.p.h.).

En la aplicación de la ecuación [6] consideramos el proceso desde que el auto supera un giro de 20° -más adelante será justificada esta elección-, lo que sucede cuando el vehículo ya recorrió 18 pies. En consecuencia el valor de S es de 92 pies = 28,04 m, y la rotación a considerar en el tramo restante de 110° = 0,61 π . Como no conocemos el modelo de rodado de que se trata estimamos la distancia entre ejes entre 2,6 y 2,9 metros. Y utilizando la forma más simple de la ecuación [9], tendremos:

$$v_o = [2 \mathbf{u g} (S + 0,575 \theta E_e)]^{1/2} = 19,07 \text{ a } 20,18 \text{ m/s (aprox. 69 km/h - 43 m.p.h.)}$$

El valor es un 13 % superior al resultado de Limpert. Pareciera que Martínez y Limpert tienen razón; si se aplicara un factor de corrección de 0,13 al coeficiente de fricción \mathbf{u} , los resultados serían coincidentes.

Realmente ¿es así?.

El criterio aportado por **Limpert** -reducción en un 20 % del coeficiente de fricción-, fue cuestionado en diversas oportunidades y por diversos autores. En nuestro caso nos remitimos a dos ensayos⁽⁴⁾, realizados por el sargento **Thomas Shelton** de la Patrulla de Autopistas de California.

En ambos ensayos, vehículos tripulados fueron lanzados a velocidades conocidas a un derrape inducido por dos volantazos opuestos y sucesivos, permitiendo un desplazamiento libre, sin accionar ni el acelerador ni el freno, hasta alcanzar el punto de reposo. En ambos casos se midió el coeficiente de fricción, produciendo una frenada con ruedas bloqueadas, inmediatamente después del derrape, a fin de minimizar las diferencias de temperatura y presión de inflado. En uno de los ensayos, el vehículo fue equipado con un acelerómetro triaxial, registrándose las aceleraciones longitudinal y lateral, lo que permite confirmar las observaciones de Wood (citado por Martínez) entre otras cosas que el coeficiente de desaceleración, que no es constante en ninguno de los ejes, tiene un valor medio en el sentido longitudinal y transversal muy similar.

En ambos casos se aplica el método de **Limpert** para analizar el grado de precisión del mismo. Veamos los resultados

Primer ensayo.

Automóvil Chevrolet Caprice 1989, que recorre una trayectoria curva de 216,83 pies con un giro total de 111°. El coeficiente de fricción medido es 0,73. El desplazamiento medido desde que el rodado gira 20° respecto de la trayectoria es de 90 pies y la rotación resulta de 11°. Por aplicación de Limpert, la velocidad al inicio de la trayectoria es 40,3 mph. La velocidad real medida al inicio de la maniobra era de 52 mph. La aplicación de la ecuación [8] desde los 20°, rotación de 91°, -distancia entre ejes del Chevrolet Caprice 89 de 2,95 m, según datos extraídos de la página www.aiexperts.com-, arroja una velocidad de 46,7 mph.

Segundo ensayo

Automóvil Ford Mustang 1988 ($E = 2,55$ m), trayectoria de 139,85 pies, giro de 100° , considerado desde los 20° de desalineación con la trayectoria ($S = 78$ pies); cálculo con Limpert 34,3 mph; velocidad medida 41 mph. Estimación con la ecuación [8], 42 mph.

Comparando los resultados y verificando las dispersiones se tiene el siguiente cuadro de valores

Caso.	v medida	Calc Limpert	D L %	Ec [8]	Ec [8]/Limpert %
Ej 20-8	-	38,2	¿?	45	13
Ens. 1	52	40,3	- 29	46,7	16
Ens. 2	41	34,3	- 19,5	42	23

1ª Conclusión: Aplicando la ecuación [8] se obtendrá una sobre-estimación respecto del modelo de **Limpert** de entre el 13 y el 23 %

2ª Conclusión: frente a los dos casos donde la velocidad real es conocida, la aplicación del criterio de **Limpert** subestima entre un 20 y un 30 % los resultados.

Son sólo dos casos. No sirven para sacar conclusiones contundentes. Pero permiten orientar algunas preguntas. La primera cuestión a resolver es:

¿Se puede calcular con exactitud la velocidad inicial en un movimiento de rototraslación?

Definitivamente no. Las consideraciones que llevan a las fórmulas simplificadas, desprecian un valor de trabajo de rozamiento inicial (giros de menos de 20°) o el trabajo de las suspensiones, por sólo citar dos ejemplos. Incluso el coeficiente de fricción tanto en el sentido lineal como angular, es variable (y no siempre con el grado de precisión en la determinación). Estas cuestiones las planteamos en la introducción de la cuestión (*Es un criterio aceptado en la investigación de accidentes de tránsito, despreciar o no considerar formas de disipación de energía asociadas al calor, al sonido, e incluso al trabajo mecánico de las suspensiones.*). Son diferencias de escasa incidencia, pero que nos alejan del valor cierto.

Limpert parece superar una de las fuentes de error citadas. Calcula el trabajo de fricción desde el inicio de la trayectoria, lo que no impide que sus resultados sean los más erráticos de la serie. Puede ser casualidad. También puede ser error sistemático del método.

Emplear una expresión derivada del trabajo total de rozamiento como la ecuación [2]:

$$L = F_r S + M_r \theta = m g u S + M_r \theta = E_c$$

no tiene nada de original, es una simple aplicación de los principios elementales de la física del sólido; incluso el propio **Limpert** la emplea en el primero de los ejemplos indicados (Example 21-3, pag. 362-367)

De tal manera que no parece que el criterio de computar el trabajo de la *fuerza neta de roce que se opone a la traslación .. disminuida por el giro* en detalle, no asegura ni precisión ni certeza de resultados. Como bien plantea Martínez ese cómputo *depende del detalle de la relación entre la velocidad de traslación y la de rotación, y de las distancias del centro de masa a las ruedas.*

El cómputo del modelo de **Limpert** es muy laborioso; si luego hay que aplicarle un incierto descuento del 20 %, no parece un método muy confiable. El criterio expuesto en este artículo, de descomponer el movimiento en rotación y traslación, y calcular el trabajo desarrollado por un fenómeno de fricción de carácter global, resuelve estas indeterminaciones de manera sencilla, y con buena aproximación.

Pero toda discusión sobre el mejor modelo, el *modelo perfecto*, es una discusión estéril. Sólo la rigurosidad del trabajo del investigador, y la permanente crítica de los resultados aseguran resultados óptimos.

REFERENCIAS

- ⁽¹⁾ *Rudolf Limpert - MOTOR VEHICLE ACCIDENTS RECONSTRUCTION AND CAUSE ANALYSIS, Example 21-3*, pag. 362-367
- ⁽²⁾ *Dr. Ernesto Martinez, Ing Gustavo Brambati – INVESTIGACION Y PERITAJE DE ACCIDENTES VIALES, Seminario ITSEMAP AUSTRAL, 24 y 25 de noviembre de 1997*, pag. 72 – 74.
- ⁽³⁾ *Rudolf Limpert - MOTOR VEHICLE ACCIDENTS RECONSTRUCTION AND CAUSE ANALYSIS, #20-3(f) Combined Speeds*, pag. 332-338
- ⁽⁴⁾ *Thomas Shelton and Victor Craig – TRASLATIONAL DECELERATION FROM VEHICLE SIDESLIP, ACCIDENT RECONSTRUCTION JOURNAL, Ene-Feb 1995*, pag. 43-51